

单元素养测评卷（一）

第六章

(时间:120 分钟 分值:150 分)

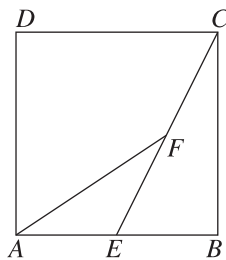
一、选择题:本题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,2), \boldsymbol{b}=(x,4)$, 若 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, 则实数 $x=$ _____ ()
A. 8
B. -2
C. 2
D. -8

2. [2024 · 北京一六五中测试] 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C = \frac{2}{3}$, $AC = 4$, $BC = 3$, 则 $\cos B =$ ()

- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

3. [2024·北京中关村中学测试] 如图所示,在正方形 $ABCD$ 中, E 为 AB 的中点, F 为 CE 的中点,则 $\overrightarrow{AF} =$ ()



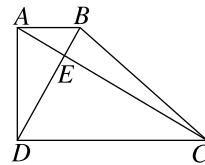
4. [2024·东城期末] 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为非零向量, 下列结论中正确的是 ()
- A. $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| > |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$ B. $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| > |\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|$
- C. $(2\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (2\boldsymbol{b})$ D. $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 \cdot \boldsymbol{b}^2$

5. [2024·北京十一中测试] 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a \cos B = b \cos A$, 且 $a = b \sin C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ()
- A. 锐角三角形 B. 钝角三角形
C. 等腰直角三角形 D. 不确定

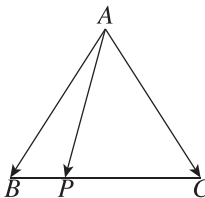
6. [2024·怀柔期末] 设非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, 则“ $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \perp (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$ ”是“ $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b}$ ”的 ()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. [2024 · 海淀期末] 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $A(-1, \sqrt{3})$, 点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$, 其中 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. 若 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}| = \sqrt{5}$, 则 $\theta =$ ()
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

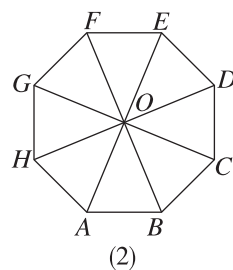
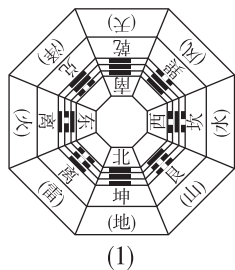
8. [2024 · 朝阳期末] 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $AC \perp BD$, $\angle BDC = \frac{\pi}{3}$, $AB = 2$, $DC = 6$, 则 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角的余弦值为 ()
- 



9. [2024 · 北京八中测试] 如图, 已知等腰三角形 ABC 中, $AB=AC=3$, $BC=4$, 点 P 是边 BC 上的动点, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ 为 ()
- A. 定值 10
B. 定值 6
C. 变量且最大值为 10
D. 变量且最小值为 6
- 
- The diagram shows an isosceles triangle ABC with vertex A at the top. The base is BC . A point P is located on the segment BC . Vectors are drawn from A to B , A to C , and A to P . A vector representing the sum of $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AC}$ is shown as a single vector from A to a point on the extension of BC , labeled with a vector arrow and the expression $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

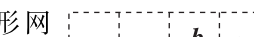


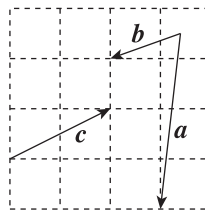
10. [2024·丰台期末] 八卦是中国传统文化中的一部分,八个方位分别象征天、地、风、雷、水、火、山、泽八种自然现象.八卦模型如图(1)所示,其平面图形为正八边形,如图(2)所示,点 O 为该正八边形的中心,设 $|\overrightarrow{OA}|=1$,点 P 是正八边形 $ABCDEFGH$ 边上任一点,下列结论中正确的个数是 ()



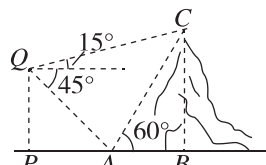
- ① $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{BO}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$;
- ② $|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}|=\frac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{DH}|$;
- ③ $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OD}$ 上的投影向量为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}$ ($\boldsymbol{e}$ 为与 $\overrightarrow{OD}$ 同向的单位向量);
- ④ $\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2+\overrightarrow{PD}^2+\overrightarrow{PE}^2+\overrightarrow{PF}^2+\overrightarrow{PG}^2+\overrightarrow{PH}^2$ 的取值范围是
[12+2 $\sqrt{2}$,16].
- A. 1 B. 2
- C. 3 D. 4

二、填空题: 本题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. [2024 · 顺义期末] 在锐角三角形 ABC 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 $a, b, c, a=1, b=2, \triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{15}}{4}$, 则 $\cos C =$ _____.
12. [2024 · 石景山期末] 已知向量 a, b, c 在正方形网格中的位置如图所示. 若网格纸上小正方形的边长为 1, 则 $c \cdot (a - b) =$ _____.
- 



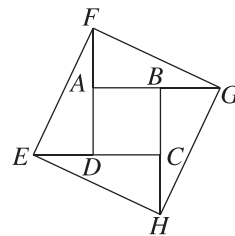
13. 如图,某山的高度 $BC=300$ m,一架无人机在 Q 处观测到山顶 C 的仰角为 15° ,地面上 A 处的俯角为 45° ,若 $\angle BAC=60^\circ$,则此无人机距离地面的高度 PQ 为 _____ m.



14. [2025·丰台期中] 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 $a, b, c, A = \frac{\pi}{6}, b = 2$.

- ①若 $c = \sqrt{3}$, 则 $a =$ _____;
- ②若 $\triangle ABC$ 有两个解, 则 a 的一个值可以为 _____.

15. 赵爽为《周髀算经》一书作注时介绍了“勾股圆方图”，即“赵爽弦图”. 如图是某同学绘制的赵爽弦图，其中 $AD=ED=2$ ，点 P, Q 分别是正方形 $ABCD$ 和正方形 $EFGH$ 上的动点，给出下列四个结论：



- ① $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EF} = 4$;
 ② $|\overrightarrow{EQ}| \leq 2\sqrt{10}$;
 ③ 设 $\overrightarrow{FB}$ 与 $\overrightarrow{FE}$ 的夹角为 θ , 则 $\tan \theta$ 的值为 3;
 ④ $\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{EQ}$ 的最大值为 12.

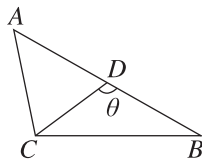
其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题: 本题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. (13 分) 设平面向量 $\mathbf{a} = (1, 0)$, $|\mathbf{b}| = 2$, 且 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 3$.
- (1) 求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 的值;
- (2) 判断 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 是否平行, 并说明理由;
- (3) 若 $(\lambda \mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 12$, 求实数 λ 的值.

17. (14 分)[2025·北京师大附中期中] 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c ,已知 $a\sin A=c\sin C+(b-c)\sin B$.
- (1)求角 A ;
- (2)若 $a=7,c=5$,求 $\triangle ABC$ 的面积;
- (3)求 $\sin B+\sin C$ 的取值范围.

18. (14 分)如图所示,在 $\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c ,已知 $\frac{\sqrt{3}\sin C}{\cos B}=\frac{c}{b}$.
- (1)求角 B 的大小;
- (2)点 D 为边 AB 上的一点,记 $\angle BDC=\theta$,若 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi,CD=2,AD=\sqrt{5},a=\frac{8\sqrt{5}}{5}$,求 $\sin\theta$ 与 b 的值.



19. (14 分)[2024·通州期末] 在平面直角坐标系中, O 为原点, $A(2,2),B(3,m),C(n,4),\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\parallel\overrightarrow{OA},P$ 为线段 BC 上一点,且 $\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{BC}$.
- (1)求 m,n 的值;
- (2)当 $\lambda=\frac{3}{5}$ 时,求 $\cos\angle APC$;
- (3)求 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的取值范围.

20. (15 分)在 $\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 $a,b,c,\cos 2A+\cos A=0$.
- (1)求 A 的大小;
- (2)若 $a=7$,从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知,使得 $\triangle ABC$ 存在,求 $\triangle ABC$ 最长边上高的长.
- 条件①: $\sin C=\frac{5\sqrt{3}}{14}$;
- 条件②: $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$;
- 条件③: $b=10$.
- 注:如果选择的条件不符合要求,第(2)问得0分;如果选择多个符合要求的条件分别解答,按第一个解答计分.

21. (15 分)[2024·海淀期末] 已知 n 维向量 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,给定 $k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$,定义变换 φ_k :选取 $i\in\{0,1,\cdots,n-1\}$,再选取一个实数 x ,对 a 的坐标进行如下改变,若 $i+k\leq n$,则将 $a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_{i+k}$ 同时加上 x ,其余坐标不变;若 $i+k>n$,则将 $a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_n$ 及 $a_1,a_2,\cdots,a_{i+k-n}$ 同时加上 x ,其余坐标不变.若 a 经过有限次变换 φ_k (每次变换所取的 i,x 的值可能不同)后,最终得到的向量 $(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 满足 $t_1=t_2=\cdots=t_n$,则称 a 为 k 阶可等向量.例如,向量 $(1,3,2)$ 经过两次变换 φ_2 可得 $(1,3,2)\xrightarrow{i=2,x=1}(2,3,3)\xrightarrow{i=1,x=-1}(2,2,2)$,所以 $(1,3,2)$ 是2阶可等向量.
- (1)判断 $(1,2,3)$ 是否是2阶可等向量?说明理由.
- (2)若取 $1,2,3,4$ 的一个排序得到的向量 (a_1,a_2,a_3,a_4) 是2阶可等向量,求 a_1+a_3 .
- (3)若任取 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个排序得到的 n 维向量均为 k 阶可等向量,则称 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为 k 阶强可等向量,求证:向量 $(1,2,3,4,5,6,7)$ 是5阶强可等向量.